Approximation mittels Linearkombinationen von Projektionsoperatoren

Braß, Helmut

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 18, 1966, S.50-69

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Approximation mittels Linearkombinationen von Projektionsoperatoren

Von Helmut Braß

Vorgelegt von Wilhelm Quade

(Eingegangen am 23. 3. 1966)

Übersicht: Es sei (Z_n) eine Folge von linearen stetigen Operatoren, die einen normierten Raum B in sich abbilden. Es ist ein Hauptproblem der Approximationstheorie, das asymptotische Verhalten der Folge

$$\varrho_n[f] = \| f - Z_n[f] \| \qquad f \in B$$

zu untersuchen. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß sich unter geeigneten Voraussetzungen über die Z_n die $\varrho_n[f]$ unter Verwendung der

$$E_n[f] = \inf_{u \in Z_n(B)} \| f - u \|$$

abschätzen lassen. Da das asymptotische Verhalten der $E_n[f]$ in mehreren Spezialfällen gut bekannt ist, ist damit eine Methode gegeben, mit der sich bekannte und neue Resultate über den Annäherungsgrad in einfacher und einheitlicher Weise herleiten lassen.

Summary. Let (Z_n) be a sequence of continous linear operators which map a normed space B in itself. It is a main problem in approximation theory to study the asymptotic behaviour of

$$\varrho_n[f] = \| f - Z_n[f] \| \qquad f \in B$$

In this paper estimates of $\varrho_n[f]$ by means of

$$E_n[f] = \inf_{u \in Z_n(B)} \| f - u \|$$

are given, which are valid under suitable conditions for (Z_n). As the asymptotic behaviour of $E_n[f]$ is well known in some special cases, this is a method to get new and known results about the degree of approximation in simple and unified manner.

1. Einleitung

In der Approximationstheorie begegnet man häufig der folgenden Situation: Gegeben seien

a) ein normierter Raum B

b) ein Element $f \in B$

c) eine Folge von endlichdimensionalen Unterräumen

$$U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset B$$

d) eine Folge von linearen stetigen Operatoren Z_n mit

$$Z_n(B) = U_n$$

Gefragt ist nach dem asymptotischen Verhalten der Folge

$$\varrho_n[f] = \| f - Z_n[f] \|.$$

Dies Problem ist in vielen speziellen Fällen gründlich studiert (z. B. wenn die $Z_k[f]$ Interpolationspolynome oder Teilsummen von *Fourier*schen Reihen oder *Fejér*sche Mittel oder *Bernstein*polynome bedeuten), jedoch sind genauere Aussagen im allgemeinen Fall bis heute nicht zu machen. Immerhin weiß man folgendes: wenn Z_k Projektionsoperator ist, d. h. U_k punktweise auf sich abbildet, dann gilt *(Lebesgue)*

$$\| f - Z_k[f] \| \leq (\| Z_k \| + 1) E_k[f]. \tag{1,1}$$

Dabei ist, wie in der Approximationstheorie üblich

$$E_k[f] = \inf_{u \in U_k} \| f - u \|$$

gesetzt.

Beweis von (1,1): Es sei $u_k(f) \in U_k$ ein Element mit

$$\| f - u_k(f) \| = E_k[f],$$

dann ist

$$\| f - Z_k[f] \| \leq \| f - u_k(f) \| + \| u_k(f) - Z_k[f] \| = E_k[f] +$$
$$\| Z_k[u_k(f)] - Z_k[f] \| \leq E_k[f] + \| Z_k \| \, \| u_k(f) - f \| = (\| Z_k \| + 1) E_k[f].$$

Die Abschätzung (1,1) ist zur Untersuchung der oben formulierten Frage mehrfach mit gutem Erfolg benutzt worden; man hat daher versucht, durch Verwendung der $E_k[f]$ gekennzeichnete Analoga zu (1,1) zu finden, die auch für allgemeinere Operatoren gelten.

Den ersten wesentlichen Schritt in dieser Richtung tat *S. B. Stečkin* [1] bei der Behandlung der Approximation stetiger periodischer Funktionen durch ihre *Fejér*schen Mittel. Eine auf beliebige lineare Mittel von Teilsummen von *Fourier*schen Reihen anwendbare Verallgemeinerung hat dann *M. F. Timan* [2] ohne Beweis veröffentlicht. *G. Freud* [3] hat *Stečkins* Methode auf Orthogonalpolynomreihen übertragen.

In dieser Arbeit soll eine Abschätzung der in Rede stehenden Art von allgemeinerem Charakter bewiesen und es sollen einige Anwendungen derselben betrachtet werden. Wesentlich für die hier verwendete Beweismethode (die der von *Stečkin* ähnelt, aber keine direkte Verallgemeinerung ist) ist, daß die Z_k sich in übersichtlicher Weise als Linearkombinationen von Projektionsoperatoren darstellen lassen. Die oben genannte Voraussetzung c) möge daher in folgender Weise präzisiert werden:

c_1) Es sei ein Dreiecksmatrix $\mathfrak{A} = (a_{nk} \mid k = 0, 1, \ldots n;\ n = 0, 1, \ldots)$ von nichtnegativen Zahlen mit

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk} = 1 \qquad n = 0, 1, \ldots$$

gegeben.

c₂) Es sei ein System $\gamma = (S_k^{(n)} \mid k = 0, 1, \ldots n; n = 0, 1, \ldots)$ von auf B erklärten Projektionsoperatoren gegeben. Dabei habe $S_k^{(n)}$ den Bildraum U_k.

c₃) Es gelte

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\, S_k^{(n)}.$$

Bevor die grundlegende Abschätzung formuliert und bewiesen wird, mögen noch einige Bezeichnungen vereinbart werden. Es sei p eine feste natürliche Zahl. Der lineare Operator

$$\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{k} \binom{k+p-1-\nu}{p-1} S_\nu^{(n)}}{\binom{k+p}{p}}$$

werde mit $R_{nk}^{(p)}$ bezeichnet. Seine Norm werde durch eine als Funktion von k (bei festem n und p) nicht abnehmende Folge $N_{nk}^{(p)}$ majorisiert:

$$\| R_{nk}^{(p)} \| \leq N_{nk}^{(p)} \qquad k = 0, 1, \ldots n.$$

Für $k > n$ sei

$$a_{nk} = 0 \text{ sowie } N_{nk}^{(p)} = N_{nn}^{(p)}$$

und für $k < 0$ sei

$$a_{nk} = 0 \text{ sowie } R_{nk}^{(p)} = 0$$

gesetzt. Unter $\omega(f; \delta)$ werde der Stetigkeitsmodul einer auf einem Segment definierten stetigen reellen Funktion f verstanden:

$$\omega(f; \delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} | f(y) - f(x) |.$$

Schließlich sei noch notiert, daß der Differenzoperator Δ^ν durch

$$\Delta^\nu a_k = \Delta^{\nu-1} a_k - \Delta^{\nu-1} a_{k+1}; \quad \Delta^0 a_k = a_k$$

definiert ist, und daß sich die Differenzenbildung stets auf die Abhängigkeit von k bezieht.

2. Die grundlegende Abschätzung

In diesem Abschnitt werde der Einfachheit halber bei a_{nk}, S_{nk}, $R_{nk}^{(p)}$ und $N_{nk}^{(p)}$ jeweils der Index n weggelassen.

Satz 1:

Es gebe eine Zahl C derart, daß

$$\frac{1}{j+1} \sum_{k=j-p}^{2j+1} | \Delta^\nu a_k | (k - j + 2p)^\nu \leq C a_j \tag{2,1}$$

für alle ν mit $0 \leq \nu \leq p$ und alle j mit $0 \leq j \leq n$ gilt. Dann ist

$$\| f - \sum_{k=0}^{n} a_k S_k [f] \| \leq C L_p \sum_{k=0}^{n} a_k N^{(p)}_{2k+1} E_k [f]$$

wo L_p eine nur von p abhängige Zahl ist.

Beweis:

Es seien $b_k^{(j)}$ nichtnegative Zahlen, die den Bedingungen

$$\sum_{j=\left[\frac{k}{2}\right]}^{k} b_k^{(j)} = a_k \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{2,2}$$

$$b_k^{(j)} = 0 \text{ für } j - p \leq k < j \text{ und } 2j + 1 < k \leq 2j + 1 + p$$

genügen. Die Abschätzung beginnt folgendermaßen:

$$\| \sum_{k=0}^{n} a_k S_k [f] - f \| = \| \sum_{k=0}^{n} a_k (S_k [f] - f) \| \tag{2,3}$$

$$= \| \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{2j+1} b_k^{(j)} (S_k [f] - f) \| = \| \sum_{j=0}^{n} T_j \| \leq \sum_{j=0}^{n} \| T_j \| .$$

Mit $u_j (f)$ werde nun ein Element aus U_j bezeichnet, für das

$$E_j [f] = \| f - u_j (f) \|$$

gilt. Man kann wegen

$$S_k [u_j (f)] = u_j (f) \qquad \text{für alle } k \geq j$$

weiter umformen zu

$$T_j = \sum_{k=j}^{2j+1} b_k^{(j)} \{ S_k [f - u_j (f)] + (u_j (f) - f) \} .$$

p-fache partielle Summation führt auf

$$T_j = \sum_{k=j-p}^{2j+1} \Delta^p b_k^{(j)} \binom{k+p}{p} \{ R_k^{(p)} [f - u_j (f)] + (u_j (f) - f) \},$$

was man abschätzen kann durch

$$\| T_j \| \leq \sum_{k=j-p}^{2j+1} | \Delta^p b_k^{(j)} | \binom{k+p}{p} \{ \| R_k^{(p)} [f - u_j (f)] \| + \| u_j (f) - f \| \}$$

$$\leq \binom{2j+1+p}{p} \sum_{k=j-p}^{2j+1} | \Delta^p b_k^{(j)} | \{ N_k^{(p)} E_j + E_j \} \tag{2.4}$$

$$\leq 2 (2j+2)^p E_j N_{2j+1}^{(p)} \sum_{k=j-p}^{2j+1} | \Delta^p b_k^{(j)} | .$$

Die letzte Summe wird nun durch geeignete Verfügung über die $b_k^{(j)}$ weiter abgeschätzt, und zwar wird gesetzt:

$$b_k^{(j)} = a_k \, (c_k^{(j)} + d_k^{(j)})$$

mit

$$c_k^{(j)} = 2 \frac{\binom{2j - k + 2p}{2p}\binom{2k - 2j + 2p}{2p}}{\binom{k + 4p + 1}{4p + 1}}$$

und $d_k^{(j)} = 0$ außer, wenn k eine gerade Zahl ist und $j = k$ gilt. In diesem Ausnahmefall ist

$$d_k^{(k)} = - \frac{\binom{\frac{k}{2} + 2p}{2p}}{\binom{k + 4p + 1}{4p + 1}}$$

zu setzen.

Man hat zunächst zu verifizieren, daß durch diese Wahl die an die $b_k^{(j)}$ gestellten Bedingungen (2,2) erfüllt sind. Dazu benutzt man die Identitäten

$$2 \sum_{j=r}^{2r+1} \binom{2j - 2r - 1 + 2p}{2p}\binom{4r + 2 - 2j + 2p}{2p} = \binom{2r + 1 + 4p + 1}{4p + 1}$$

und

$$2 \sum_{j=r}^{2r} \binom{2j - 2r + 2p}{2p}\binom{4r - 2j + 2p}{2p} = \binom{r + 2p}{2p} + \binom{2r + 4p + 1}{4p + 1}$$

die erste im Fall $k = 2r + 1$, die zweite im Fall $k = 2r$. Man beweist sie am bequemsten mit der Methode der erzeugenden Funktionen.

Wegen der Linearität des Δ-Operators ist

$$\sum_{k=j-p}^{2j+1} |\Delta^p b_k^{(j)}| \leq \sum_{k=j-p}^{2j+1} |\Delta^p a_k c_k^{(j)}| + \sum_{k=j-p}^{2j+1} |\Delta^p a_k d_k^{(j)}| . \tag{2,5}$$

In der zweiten Summe rechts sind höchstens die Terme von Null verschieden, bei deren Bildung $d_j^{(j)}$ verwendet wird, also die Summanden mit $j - p \leq k \leq j$. Man überlegt sich leicht, daß diese Summe durch

$$2^p a_j |d_j^{(j)}| \leq 2^p \frac{(4p + 1)!}{(j + 1)^p} a_j \tag{2,6}$$

abgeschätzt werden kann. Um nun auch den anderen Summanden in (2,5) in geeigneter Weise abzuschätzen, benutzt man die leicht zu beweisende Formel

$$\Delta^p a_k c_k = \sum_{\nu=0}^{p} \binom{p}{\nu} \Delta^\nu a_k \Delta^{p-\nu} c_{k+\nu} . \tag{2,7}$$

mit deren Hilfe man

$$\sum_{k=j-p}^{2j+1} | \Delta^p a_k c_k^{(j)} | \leq \sum_{\nu=0}^{p} \binom{p}{\nu} \sum_{k=j-p}^{2j+1} | \Delta^\nu a_k | \, | \Delta^{p-\nu} c_{k+\nu}^{(j)} | \tag{2,8}$$

erhält.

Zur Abschätzung von $| \Delta^{p-\nu} c_{k+\nu}^{(j)} |$ wendet man (2,7) zweimal nacheinander an und benutzt die Beziehungen

$$\left| \Delta^\varkappa \binom{r-k}{q} \right| = \left| \binom{r-k-\varkappa}{q-\varkappa} \right| \leq (r-k)^{q-\varkappa} ,$$

$$\left| \Delta^\varkappa \binom{2k+r}{q} \right| = \left| (-1)^\varkappa \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{\nu} \binom{2k+r+\nu}{q-\varkappa} \right| \leq 2^\varkappa \, (2k+r+\varkappa)^{q-\varkappa} .$$

$$\left| \Delta^\varkappa \frac{1}{\binom{k+r}{q}} \right| = \left| \frac{q}{q+\varkappa} \frac{1}{\binom{k+r+\varkappa}{q+\varkappa}} \right| \leq \frac{(q+\varkappa)!}{(k+r-q+1)^{q+\varkappa}} .$$

Nach einfachen Zwischenrechnungen erhält man

$$| \Delta^{p-\nu} c_{k+\nu}^{(j)} | \leq L_p^* (k-j+2p)^\nu \frac{1}{(j+1)^{p+1}} ,$$

wobei L_p^* nur von p abhängt. Setzt man dies Ergebnis in (2,8) ein und beachtet noch (2,1), dann ergibt sich

$$\sum_{k=j-p}^{2j+1} | \Delta^p a_k c_k^{(j)} | \leq \frac{L_p^*}{(j+1)^p} \sum_{\nu=0}^{p} \binom{p}{\nu} C \, a_j = \frac{2^p L_p^* C}{(j+1)^p} a_j . \tag{2,9}$$

Kombiniert man (2,9), (2,6) und (2,5), dann hat man

$$\sum_{k=j-p}^{2j+1} | \Delta^p b_k^{(j)} | \leq C \frac{a_j}{(j+1)^p} [2^p L_p^* + 2^p (4p+1)!] ,$$

woraus wegen (2,4) und (2,3) die Behauptung unmittelbar folgt.
Im Fall $p = 1$ des Satzes 1 ist die folgende einfache Feststellung häufig von Nutzen:

Satz 2:
Es seien die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Es gibt eine Zahl C_1 mit

$$\max_{j-1 \leq k \leq 2j+2} a_k \leq C_1 a_j \qquad j = 0, 1, \ldots$$

(ii) die Folge (Δa_k; $k = 0, 1, \ldots n$) hat nicht mehr als r Zeichenwechsel.
Dann ist im Fall $p = 1$ die Voraussetzung von Satz 1 mit

$$C = 6 (r+2) C_1$$

erfüllt.

3. p-zulässige Matrizen

Definition:

Eine Matrix $\mathfrak{A}$ heiße p-zulässig, wenn jede ihrer Zeilen die Bedingung (2,1) (darin ist a_k also durch a_{nk} zu ersetzen) mit einem von n unabhängigen C erfüllt.

Satz 3:

Die *(Cesàro-)*Matrix $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ mit

$$a_{nk} = \frac{\binom{n+q-1-k}{q-1}}{\binom{n+q}{q}} \qquad k = 0, 1, \ldots n,$$

q eine natürliche Zahl, ist p-zulässig für jedes $p \leq q$.

Beweis:

Es ist

$$\frac{1}{j+1} \sum_{k=j-p}^{j-1} |\Delta^\nu a_{nk}| (k - j + 2p)^\nu \leq (2p)^p p \max_{j-p \leq k \leq j-1} |\Delta^\nu a_{nk}|$$
$$\leq (2p)^p p \cdot 2^p \max_{j-p \leq k \leq j+p} a_{nk}.$$

Man verifiziert leicht, daß

$$\frac{\max\limits_{j-p \leq k \leq j+p} a_{nk}}{a_{nj}}$$

unterhalb einer nur von q abhängigen Schranke bleibt.
Man braucht nun also nur noch

$$\frac{1}{j+1} \sum_{k=j}^{2j+1} |\Delta^\nu a_{nk}| (k - j + 2p)^\nu$$

zu untersuchen. Für die in Frage kommenden Werte von k gilt:

$$\Delta^\nu a_{nk} = \frac{\binom{n+q-1-k-\nu}{q-1-\nu}}{\binom{n+q}{q}},$$

falls nicht $q = p = \nu$ ist. Dieser letzte Fall ist aber in trivialer Weise zu erledigen. Mit der Abkürzung $m = \min(2j+1, n)$ hat man

$$\frac{1}{j+1} \sum_{k=j}^{m} \binom{n+q-1-k-\nu}{q-1-\nu} (k - j + 2p)^\nu$$
$$\leq \frac{1}{j+1} (n - j + 2p)^\nu \left[\binom{n+q-j-\nu}{q-\nu} - \binom{n+q-1-m-\nu}{q-\nu}\right]$$

$$\leq \frac{1}{j+1}(n-j+2p)^\nu\,[(n+q-j-\nu)^{q-\nu}-(n-m)^{q-\nu}]$$

$$\leq \frac{1}{j+1}(n-j+2p)^\nu\,(q-\nu)\,(m+q-j-\nu)\,(n+q-j-\nu)^{q-\nu-1}$$

$$=(q-\nu)\frac{m+q-j-\nu}{j+1}(n-j+1)^{q-1}\left(1+\frac{q-\nu-1}{n-j+1}\right)^{q-\nu-1}\left(1+\frac{2p-1}{n-j+1}\right)^\nu$$

$$\leq (q-\nu)\frac{j+1+q-\nu}{j+1}(q-\nu)^{q-\nu-1}(2p)^\nu\,(n-j+1)^{q-1}$$

$$\leq 2^q\,q^q\,q!\binom{n+q-1-j}{q-1},$$

womit alles bewiesen ist.

Satz 4:

Die *(Riesz-)*Matrix $\mathfrak{A}=(a_{nk})$ mit

$$a_{nk}=\left[1-\left(\frac{k}{n+1}\right)^\beta\right]^q-\left[1-\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^\beta\right]^q \qquad k=0,1,\ldots n,$$

wo β und q beliebige positive Zahlen sind, ist für jedes $p\leq q$ p-zulässig.

Beweis:

Die Summanden in (2,1) mit $k\leq j$ lassen sich ganz ähnlich wie beim vorigen Beweis abschätzen. Bei der Behandlung der übrigen Summanden ist das folgende Lemma wesentlich.

Lemma:

Es ist mit den a_{nk} aus Satz 4

$$|\Delta^\nu a_{nk}|\leq\frac{O(1)}{(n+1)^{\beta q}}\sum_{\varkappa=1}^{\nu+1}[(n+1)^\beta-k^\beta]^{q-\varkappa}\,k^{\beta\varkappa-\nu-1}$$

falls $0<k\leq n$.

Hier, wie auch im folgenden bedeutet $O(1)$ eine Zahl, die nur von β und q abhängt. Zum Beweis des Lemmas im Fall $0<k\leq n-\nu$ beachte man, daß

$$a_{nk}=\Delta\left(\left[1-\left(\frac{k}{n+1}\right)^\beta\right]^q\right)$$

gesetzt werden kann, man hat also

$$\Delta^{\nu+1}\left(\left[1-\left(\frac{k}{n+1}\right)^\beta\right]^q\right)$$

abzuschätzen, und das ist wegen

$$\Delta^\nu f(k)=(-1)^\nu f^{(\nu)}(k+\nu\vartheta)\text{ mit }0<\vartheta<1$$

leicht möglich, wenn man

$$\frac{d^{\nu+1}}{d\,k^{\nu+1}}\left(1-\left(\frac{k}{n+1}\right)^{\beta}\right)^{q}$$

kennt. Diese Ableitung läßt sich mit Hilfe der Formel von *Fàa di Bruno* (vgl. z. B. [4] S. 92) in der Form

$$\frac{1}{k^{\nu+1}}\sum_{\varkappa=1}^{\nu+1} \mathrm{O}(1)\left[1-\left(\frac{k}{n+1}\right)^{\beta}\right]^{q-\varkappa}\left(\frac{k}{n+1}\right)^{\beta\varkappa}$$

schreiben. Hieraus folgt das Lemma leicht, abgesehen von den k-Werten mit $n-\nu<k\leq n$. Für diese setzt man

$$\begin{aligned}
|\Delta^{\nu} a_{nk}| &= \left|\Delta^{\nu-1}\left(\left|1-\left(\frac{k}{n+1}\right)^{\beta}\right|^{q}\right)\right| \\
&\leq 2^{\nu+1}\left[1-\left(\frac{k}{n+1}\right)^{\beta}\right]^{q} \\
&= \frac{2^{\nu+1}}{(n+1)^{\beta q}}\left[(n+1)^{\beta}-k^{\beta}\right]^{q-\nu-1}\left|(n+1)^{\beta}-k^{\beta}\right|^{\nu+1}.
\end{aligned}$$

Zur weiteren Abschätzung dieser und ähnlicher Ausdrücke verwendet man zweckmäßig das folgende System von Ungleichungen (vgl. [5] S. 39)

$$r\,x^{r-1}(x-y)\geq x^{r}-y^{r}\geq r\,y^{r-1}(x-y) \text{ falls } r\geq 1 \tag{3,1}$$

$$r\,x^{r-1}(x-y)\leq x^{r}-y^{r}\leq r\,y^{r-1}(x-y) \text{ falls } 0\leq r\leq 1. \tag{3,2}$$

Dabei seien x und y positive Zahlen.

Es sei nun $\beta\geq 1$ vorausgesetzt, für $\beta<1$ ist der Beweis ähnlich. Verwendet man die erste der obigen Ungleichungen, dann hat man

$$|\Delta^{\nu} a_{nk}|\leq\frac{2^{\nu+1}}{(n+1)^{\beta q}}\beta^{\nu+1}\left[(n+1)^{\beta}-k^{\beta}\right]^{q-\nu-1}(n+1)^{(\beta-1)(\nu+1)}(n+1-k)^{\nu+1},$$

was man wegen $n-\nu<k\leq n$ weiter abschätzen kann durch

$$|\Delta^{\nu} a_{nk}|\leq\frac{\mathrm{O}(1)}{(n+1)^{\beta q}}\left[(n+1)^{\beta}-k^{\beta}\right]^{q-\nu-1}k^{(\beta-1)(\nu+1)},$$

woraus das Lemma unmittelbar folgt.

Nun kann der Beweis von Satz 4 in Angriff genommen werden.

Man beginnt mit der Feststellung, daß

$$\begin{aligned}
\max_{j<k\leq 2j+1}|\Delta^{\nu} a_{nk}| &\leq \frac{\mathrm{O}(1)}{(n+1)^{\beta q}}\sum_{\varkappa=1}^{\nu+1}\left[(n+1)^{\beta}-(j+1)^{\beta}\right]^{q-\varkappa} j^{\beta\varkappa-\nu-1} \\
&= \frac{\mathrm{O}(1)}{(n+1)^{\beta q}}\left[(n+1)^{\beta}-(j+1)^{\beta}\right]^{q-1} j^{\beta-(\nu+1)}\sum_{\varkappa=1}^{\nu+1}\left[\frac{j^{\beta}}{(n+1)^{\beta}-(j+1)^{\beta}}\right]^{\varkappa-1}
\end{aligned}$$

ist, und wendet nun (3,1) an, dabei möge $\beta \geq 1$ vorausgesetzt werden, im Fall $\beta < 1$ hat man die weiteren Schritte etwas zu modifizieren.
Man erhält

$$\max_{j<k\leq 2j+1} |\Delta^\nu a_{nk}| \leq \frac{O(1)}{(n+1)^{\beta q}} [(n+1)^\beta - (j+1)^\beta]^{q-1} j^{\beta-\nu-1} \sum_{\varkappa=0}^{\nu} \left(\frac{j}{n-j}\right)^\varkappa,$$

also

$$\max_{j<k\leq 2j+1} |\Delta^\nu a_{nk}| \leq \frac{O(1)}{(n+1)^{\beta q}} [(n+1)^\beta - (j+1)^\beta]^{q-1} j^{\beta-\nu-1} \text{ falls } 2j+1 \leq n$$

und

$$\max_{j<k\leq 2j+1} |\Delta^\nu a_{nk}| \leq \frac{O(1)}{(n+1)^{\beta q}} [(n+1)^\beta - (j+1)^\beta]^{q-1} j^{\beta-1} (n-j)^{-\nu}$$

$$\text{falls } 2j+1 > n$$

Aus diesen Ungleichungen ergibt sich nach einfacher Rechnung (man beachte dabei $\Delta^\nu a_{nk} = 0$ für $k > n$)

$$\frac{1}{j+1} \sum_{k=j+1}^{2j+1} |\Delta^\nu a_{nk}| (k-j+2p)^\nu \leq \frac{O(1)}{(n+1)^{\beta q}} [(n+1)^\beta - (j+1)^\beta]^{q-1} j^{\beta-1}.$$

Durch zweimalige Anwendung von (3,1) erhält man schließlich, daß der letzte Ausdruck gleich

$$O(1)\, a_{nj}$$

ist, was — zusammen mit der Bemerkung am Anfang — den Satz 4 beweist.

Satz 5:
Die folgenden Matrizen sind 1-zulässig

(i) *(de la Valleé Poussin)*

$$a_{2n-1,k} = \begin{cases} 3\left(\dfrac{2k+1}{2n^2} - \dfrac{3k^2+3k+1}{4n^3}\right) & \text{für } 0 \leq k < n \\[2ex] \dfrac{3}{n} - 3\dfrac{2k+1}{2n^2} + \dfrac{3k^2+3k+1}{4n^3} & \text{für } n \leq k \leq 2n-1 \end{cases}$$

(ii) *(Bernstein-Rogosinski)*

$$a_{nk} = \begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi}{2(2n+1)} \sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)} & \text{für } 0 \leq k \leq n-1 \\[2ex] \sin\dfrac{\pi}{2(2n+1)} & \text{für } k = n \end{cases}$$

(iii) *(de la Valleé Poussin)*

$$a_{nk} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!\,(n+k)!} \frac{2k+1}{n+k+1}$$

(iv) *(Korovkin)*

$$a_{nk} = \frac{1}{n+2} \tan \frac{\pi}{2(n+2)}$$
$$\left\{ 2(n-k+1) \sin \frac{2k+1}{2(n+2)} \pi \cos \frac{\pi}{2(n+2)} \right) + \sin \frac{k+1}{n+2} \pi \right\}$$

Der Beweis läßt sich mit Hilfe von Satz 2 führen. In allen Fällen hat Δa_{nk} $(k = 0, 1, \dots n)$ nur einen Zeichenwechsel. Zur weiteren Untersuchung verwendet man zweckmäßig die folgenden leicht herzuleitenden Ungleichungen:

Fall (iii)

$$c \frac{k+1}{n} < a_{nk} < c' \frac{k+1}{n} \qquad \text{für } k \leq \sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

$$\text{und } a_{n,k+1} < a_{nk} \qquad \text{für } k > \sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

Fall (iv)

$$c \frac{k+1}{n^2} < a_{nk} < c' \frac{k+1}{n^2} \qquad \text{für } k \leq \frac{n+1}{2}$$

$$\text{und } a_{n,k+1} < a_{nk} \qquad \text{für } k > \frac{n+1}{2}$$

Dabei bedeuten c und c' positive Konstanten.

4. Anwendung von Satz 1 auf Fragen der trigonometrischen Approximation

Es werde für B der Raum $C_{2\pi}$ der stetigen reellen Funktionen mit der Periode 2π, versehen mit der Norm:

$$\| f \| = \sup_t | f(t) |$$

gewählt. U_k sei der Raum der trigonometrischen Ausdrücke k-ter Ordnung. $S_k[f]$ sei die k-te Teilsumme der *Fourier*schen Reihe von $f \in C_{2\pi}$. Wegen des bekannten *Fejér*schen Satzes kann man $N_{nk}^{(1)} = 1$ wählen. Kombiniert man den Fall $p = 1$ des Satzes 1 mit den Sätzen 3, 4, 5 und der *Jackson*schen Abschätzung für die $E_k[f]$, so erhält man eine Fülle von teils bekannten, teils neuen Ergebnissen über den Annäherungsgrad. Das sei hier nur im Fall der *Riesz*schen Mittel etwas näher ausgeführt.

Satz 6:

Sei

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos k x + \beta_k \sin k x$$

die *Fourier*sche Reihe von $f \in C_{2\pi}$. Weiter seien q und β zwei positive Zahlen, $q \geq 1$. Es werde gesetzt:

$$R_n[f] = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^{\beta}\right]^q (\alpha_k \cos k\,x + \beta_k \sin k\,x).$$

Dann gilt für

$$\varrho_n[f] = \sup_x |f(x) - R_n[f]|$$

die Abschätzung:

$$\varrho_n[f] \leq \mathrm{O}(1) \frac{1}{(n+1)^{\beta}} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\beta-1} E_k[f] \tag{4,1}$$

Es werde weiter vorausgesetzt, daß f eine stetige r-te Ableitung ($r = 0, 1, 2 \ldots$) mit dem Stetigkeitsmodul $\omega(f^{(r)}; \delta) = \omega(\delta)$ habe. Dann sind in (4,1) die folgenden Ergebnisse enthalten:

a) Ist $\beta > r + 1$, dann gilt

$$\varrho_n[f] = \frac{\mathrm{O}(1)}{(n+1)^r} \omega\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

b) Ist $\beta = r + 1$, dann gilt

$$\varrho_n[f] \leq \frac{\mathrm{O}(1)}{(n+1)^r} \omega\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)$$

c) Ist $\beta = r + 1$, und gibt es eine Zahl $\alpha < 1$ derart, daß $n^{\alpha} \omega\left(\frac{1}{n}\right)$ wächst, dann gilt

$$\varrho_n[f] \leq \frac{1}{1-\alpha} \frac{\mathrm{O}(1)}{(n+1)^r} \omega\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

d) Ist $\beta < r + 1$, dann gilt

$$\varrho_n[f] \leq \frac{\mathrm{O}(1)}{(n+1)^{\beta-1}} \omega\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Beweis:

Man hat wegen Satz 1

$$\varrho_n[f] \leq \mathrm{O}(1) \sum_{k=0}^{n} a_{nk} E_k[f] \tag{4,2}$$

mit den a_{nk} aus Satz 4. Mit Hilfe der Ungleichungen (3,1) bzw. (3,2) erhält man sofort (4,1). Man überlegt sich leicht, daß die hierbei benutzte Vergrößerung an der Größenordnung der rechten Seite von (4,2) nichts ändert. Für die $E_k[f]$ setzt man die durch den *Jackson*schen Satz ([6] S. 260) gegebene Abschätzung

$$E_k[f] \leq \frac{c}{(k+1)^r} \omega\left(f^{(r)}; \quad \frac{1}{k+1}\right)$$

in (4,1) ein und erhält

$$\varrho_n [f] \leq \frac{O(1)}{(n+1)^\beta} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\beta - r - 1} \omega\left(\frac{1}{k+1}\right).$$

Hieraus erhält man a) und d), wenn man noch von der folgenden Eigenschaft des Stetigkeitsmoduls Gebrauch macht ([6] S. 104). Es gilt

$$\frac{\omega(\delta_1)}{\delta_1} \leq 2 \frac{\omega(\delta_2)}{\delta_2} \qquad \text{falls } \delta_1 \geq \delta_2 > 0.$$

Im Fall c) hat man

$$\sum_{k=0}^{n} \omega\left(\frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \left[(k+1)^\alpha \omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right]$$
$$\leq (n+1)^\alpha \omega\left(\frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{1-\alpha} (n+1)^{1-\alpha}$$

zu berücksichtigen. und im Fall b) geht man so vor:
Es sei

$$m = \left[\frac{n+1}{\ln(n+1)}\right].$$

Damit ist

$$\sum_{k=0}^{n} \omega\left(\frac{1}{k+1}\right) \leq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1} \left[(k+1)\, \omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right] + (n+1)\, \omega\left(\frac{1}{m+1}\right)$$
$$\leq 2(m+1)\, \omega\left(\frac{1}{m+1}\right) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} + (n+1)\, \omega\left(\frac{1}{m+1}\right)$$
$$\leq c\,(n+1)\, \omega\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right).$$

Der hiermit vollständig bewiesene Satz 6 ist keineswegs in allen Teilen neu, vielmehr sind spezielle Fälle häufig untersucht worden (Der Spezialfall $q = 1$, $\beta = 1$ von (4,1) ist der in der Einleitung genannte Satz von *Stečkin*). Die allgemeinsten Resultate hat *Suzuki* [7] mit einer ziemlich komplizierten Methode hergeleitet. Sie sind mit einer Ausnahme (vgl. Abschnitt 5) in dem weitergehenden Satz 6 enthalten.

Da der *Jackson*sche und der *Fejér*sche Satz in den Räumen (L^p $(1 \leq p < \infty)$ Analoga haben, lassen sich alle Abschätzungen auf diese Räume übertragen.

Bei Anwendung von Satz 1 auf die trigonometrische Interpolation wählt man B und U_k wie oben und $S_{k^{(n)}}[f]$ wird definiert durch

$$S_k^{(n)}[f] = \frac{\alpha_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu^{(n)} \cos \nu x + \beta_\nu^{(n)} \sin \nu x,$$

wobei

$$\frac{\alpha_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{(n)} \cos \nu x + \beta_\nu^{(n)} \sin \nu x$$

derjenige trigonometrische Ausdruck ist, der mit f an den Stellen

$$x_k = \frac{2 k \pi}{2 n + 1} \qquad k = 0, 1, \ldots 2 n$$

übereinstimmt. Man kann $N_{nk}^{(1)} = 1$ wählen, es ist nämlich ([8] S. 407)

$$R_{nk}^{(1)}[f] = \frac{S_0^{(n)}[f] + \ldots S_k^{(n)}[f]}{k+1}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(k+1)} \sum_{\nu=0}^{2n} f(x_\nu) \left[\frac{\sin \frac{k+1}{2}(x - x_\nu)}{\sin \frac{x - x_\nu}{2}} \right]^2$$

also

$$N_{nk}^{(1)} = \sup_{\|f\| \leq 1} \| R_{nk}^{(1)}[f] \| = R_{nk}^{(1)}[1] = 1.$$

Nach dem Muster von Satz 6 lassen sich nun leicht viele weitere Abschätzungen herleiten. Die einfachsten unter ihnen sind bekannt ([8], [9], [10], [11]).

5. Unverbesserbarkeit von einigen Abschätzungen

Es sei F_n eine fallende Nullfolge. Mit $K(F_n)$ werde die Menge der Elemente $f \in B$ bezeichnet, für die

$$E_n[f] \leq F_n$$

ist. Man kann sagen, daß die durch Satz 1 gegebene Abschätzung bestmöglich ist, wenn es ein $c > 0$ gibt, derart, daß es zu jeder Klasse $K(F_n)$ ein $f \in K(F_n)$ gibt, für das

$$\| f - \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k^{(n)}[f] \| \geq c \sum_{k=0}^{n} a_{nk} N_{n, 2k+1}^{(p)} F_k \qquad n = 1, 2, \ldots$$

gilt.

Es soll nun gezeigt werden, daß im Fall der Limitierung von *Fourier*schen Reihen bei Zugrundelegung der Metrik des Raumes $C_{2\pi}$ eine derartige Unverbesserbarkeitsaussage gilt. Dazu werde die spezielle Funktion

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (F_{\nu-1} - F_\nu) \cos \nu x \tag{5,1}$$

betrachtet. Offenbar ist $f \in C_{2\pi}$ und wegen

$$E_n[f] \leq \sup_x \left| \sum_{\nu > n} (F_{\nu-1} - F_\nu) \cos \nu x \right| = F_n$$

ist $f \in K(F_n)$. Versteht man unter $S_k^{(n)}[f]$ die k-te Teilsumme der *Fourier*schen Reihe von f, dann gilt

$$\| f - \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k^{(n)} [f] \| = \sup_x | f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_{nk} \sum_{\nu=1}^{k} (F_{\nu-1} - F_\nu) \cos \nu x |$$

$$\geq F_0 - \sum_{k=1}^{n} a_{nk} (F_0 - F_k) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} F_k.$$

Damit ist die Behauptung schon bewiesen (den Spezialfall $a_{nk} = (n+1)^{-1}$ hat *Stečkin* [1] im wesentlichen mit der gleichen Methode behandelt).

Bemerkenswert ist noch, daß das hier konstruierte $f \in K(F_n)$ nicht von $\mathfrak{A}$ abhängt.

Im folgenden wird eine typische Anwendung dieser Überlegungen beschrieben. Dazu wird daran erinnert, daß gilt: Für $f \in C_{2\pi}$ ist

$$E_k [f] \leq \frac{\text{const}_1}{(k+1)^{r+1}}$$

genau dann erfüllt, wenn $f^{(r)}$ existiert und

$$\sup_{x;|h| \leq t} | f^{(r)}(x+h) - 2 f^{(r)}(x) + f^{(r)}(x-h) | \leq \text{const} \cdot t \tag{5,2}$$

ist. Wenn man diesen klassischen Satz mit Satz 6 im Fall $\beta = r + 1$ und mit dem oben Bewiesenen kombiniert, erhält man das Ergebnis: Wenn $f^{(r)}$ existiert und (5,2) erfüllt, gilt — Bezeichnungen wie in Satz 6 — im Fall $\beta = r + 1$

$$\varrho_n [f] \leq \frac{O(1) \text{ const}}{(n+1)^\beta} \ln (n+1)$$

und die Größenordnung dieser Abschätzung kann nicht verbessert werden.

Interessanterweise kann sie doch verbessert werden (man kann den Faktor $\ln(n+1)$ weglassen), wenn man (5,2) durch

$$\sup_{x;|h| \leq t} | f^{(r)}(x+h) - f^{(r)}(x) | \leq \text{const}\, t$$

ersetzt und β eine gerade Zahl ist (*Zygmund* [9], *Suzuki* [7]).

Die im vorigen Abschnitt hergeleiteten Abschätzungen zur trigonometrischen Interpolation sind ebenfalls scharf in dem oben präzisierten Sinn, wenn man zusätzlich noch die Konvexität der Folge (F_k) fordert. Um das einzusehen, benutzt man wieder die Funktion (5,1). Beachtet man, daß aus

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \cos \nu x \qquad \text{mit} \sum_{\nu=1}^{\infty} | c_\nu | < \infty$$

für die Koeffizienten des Interpolationsausdruckes

$$S_n^{(n)} [f] = \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu \cos \nu x$$

die Beziehung

$$C_\nu = c_\nu + \sum_{\mu=1}^{\infty} (c_{\mu m + \nu} + c_{\mu m - \nu}) \qquad m = 2n + 1$$

folgt, dann erhält man nach einfacher Rechnung

$$\| f - \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k^{(n)} [f] \| \tag{5,3}$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \{ \sum_{\mu=0}^{\infty} (F_{\mu m+k} - F_{(\mu+1)m-k-1}) - \sum_{\mu=1}^{\infty} (F_{\mu m-1} - F_{\mu m}).$$

Wegen

$$F_{k-1} - F_k \geq F_k - F_{k+1} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

hat man

$$F_{\mu m+k} - F_{(\mu+1)m-k-1} \geq F_{(\mu+1)m-k-1} - F_{(\mu+1)m+k} \qquad \mu = 0, 1, \ldots$$

falls $k \leq k_0 = \left[\frac{n-1}{2}\right]$ ist. Also gilt für diese k-Werte

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} (F_{\mu m+k} - F_{(\mu+1)m-k-1})$$

$$\geq \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{\infty} [(F_{\mu m+k} - F_{(\mu+1)m-k-1}) + (F_{(\mu+1)m-k-1} - F_{(\mu+1)m+k})]$$

$$= \frac{1}{2} F_k.$$

Ganz ähnlich rechnet man

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} (F_{\mu m-1} - F_{\mu m}) \leq F_{2n} - F_{2n+1} + \frac{1}{m} \sum_{\mu=m}^{\infty} (F_\mu - F_{\mu+1})$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \sum_{\mu=n}^{2n} (F_\mu - F_{\mu+1}) + \frac{1}{m} F_m \leq \frac{1}{n+1} F_n.$$

Setzt man die beiden Abschätzungen in (5,3) ein, so erhält man

$$\| f - \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k^{(n)} [f] \| \geq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k_0} a_{nk} F_k - \frac{1}{n+1} F_n.$$

Schließlich sei noch angenommen, daß die a_{nk} den gleichen Voraussetzungen wie in Satz 1 genügen. Aus (2,1) für $\nu = 0$ folgt nach einer kurzen Rechnung

$$C_1 \sum_{j=k_0+1}^{n} a_{nk} \leq \sum_{k=0}^{k_0} a_{nk}$$

wo $C_1 < 1$ eine nur von C abhängende Konstante ist. Mit dieser Beziehung erhält man

$$\| f - \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k^{(n)} [f] \|$$

$$\geq \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{k_0} a_{nk} F_k + \frac{1}{4} F_{k_0} \sum_{k=0}^{k_0} a_{nk} - \frac{1}{n+1} F_n$$

$$\geq \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{k_0} a_{nk} F_k + \frac{1}{4} C_1 F_{k_0} \sum_{k=k_0+1}^{n} a_{nk} - \frac{1}{n+1} F_n$$

$$\geq \frac{1}{4} C_1 \sum_{k=0}^{n} a_{nk} F_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_{nk} F_k$$

$$\geq \frac{1}{8} C_1 \sum_{k=0}^{n} a_{nk} F_k$$

falls $n > 8\, C_1^{-1}$, und damit ist der Beweis beendet.

Diese Unverbesserbarkeitsaussagen sind nur für den Raum $C_{2\pi}$ bewiesen, in anderen Räumen brauchen sie nicht zu gelten. Z. B. gilt, wenn $S_k^{(n)}[f]$ wieder die k-te Teilsumme der Fourierreihe von f bedeutet

$$\left\| f - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k^{(n)}[f] \right\|_{L^2} = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{\nu=0}^{n} (2\,\nu + 1)\, E_\nu^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

wie leicht nachzurechnen. Daraus folgt im Fall $E_\nu = \dfrac{1}{\nu}$ für die Größenordnung des Fehlers $\dfrac{\sqrt{\ln n}}{n}$, während Anwendung von Satz 1 nur $\dfrac{\ln n}{n}$ ergibt.

6. Andere Anwendungen von Satz 1

Weitere wichtige Anwendungen von Satz 1 beziehen sich auf die Approximation durch Mittel von Orthogonalpolynomentwicklungen. Legt man insbesondere ultrasphärische Polynome $P_n^{(\lambda)}$ zugrunde (vgl. [12]), so läßt sich stets $N_{nk}^{(p)} =$ const wählen, wenn nur $p > \lambda$ ist [13]. Zusammen mit dem *Jackson*schen Satz ergibt das

Satz 7:
Die auf $[-1, 1]$ stetige Funktion f habe die Entwicklung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu\, P_\nu^{(\lambda)}(x)$$

nach ultrasphärischen Polynomen $P_\nu^{(\lambda)}$. Ist

$$\varrho_n^{(q,\beta)}[f] = \sup_{x\in[-1,1]} \left| f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \left[1 - \left(\frac{\nu}{n+1} \right)^\beta \right]^q \alpha_\nu\, P_\nu^{(\lambda)}(x) \right|$$

mit $q > \lambda$, so gilt

$$\varrho_n^{(q,\beta)}[f] \leq \frac{c}{(n+1)^\beta} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\beta-1} E_k[f]$$

wo c nur von q, β und λ abhängt. Hieraus folgen die gleichen Abschätzungen, wie sie in Satz 6 unter a) bis d) genannt sind.

Die Überlegungen des vorigen Abschnittes über Unverbesserbarkeit lassen sich ebenfalls fast wörtlich übertragen.

Von besonderem Interesse ist noch der Fall der C_1-Mittel von Entwicklungen nach Tschebyscheffpolynomen zweiter Art $P_\nu^{(1)}$. Hier gilt $N_{nk}^{(1)} = c \ln (n + 1)$ [13]. Damit erhält man

Satz 8:
Für die Entwicklung nach Tschebyscheffpolynomen zweiter Art gilt

$$\varrho_n^{(1,1)} [f] \leq \frac{c}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \omega \left(f; \frac{1}{\nu+1}\right) \ln (\nu + 1).$$

Insbesondere ist die Entwicklung von f nach Tschebyscheffpolynomen zweiter Art gleichmäßig C_1-limitierbar, wenn

$$\lim_{\nu \to \infty} \omega \left(f; \frac{1}{\nu}\right) \ln \nu = 0$$

ist.

Die Approximation von stetigen Funktionen durch C_1-Mittel ihrer Entwicklung in *Walsh*-Reihen (zu diesen vgl. [14], [15]) läßt sich ebenfalls mit Hilfe von Satz 1 behandeln. Man wählt als Raum B die lineare abgeschlossene Hülle (bezüglich der Supremum-Norm) der Menge der *Walsh*funktionen w_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ und als U_k den von $w_0, w_1, \ldots, w_k$ aufgespannten Raum.

Man überlegt sich leicht, daß U_{2^n-1} der Vektorraum derjenigen Treppenfunktionen auf $[0, 1]$ ist, die höchstens an den Stellen

$$x_i = \frac{i}{2^n} \qquad i = 1, 2, \ldots 2^n - 1$$

Sprünge haben. Es folgt

$$E_{2^n} [f] \leq \frac{1}{2} \omega (f; 2^{-n}),$$

also ist für

$$2^n \leq k < 2^{n+1}$$

$$E_k [f] \leq E_{2^n} [f] \leq \frac{1}{2} \omega (f; 2^{-n}) \leq \omega (f; 2^{-n-1}) \leq \omega (f; k^{-1})$$

Wenn man nun beachtet, daß $N_{nk}^{(1)} = \text{const}$ gesetzt werden kann (das ist im wesentlichen schon von *Walsh* [14] bewiesen), dann lassen sich ganz leicht wieder die üblichen Abschätzungen beweisen und insbesondere eine Frage von *N. J. Fine* ([15] S. 397) beantworten. Diese Frage ist mit einer anderen Methode auch von *S. Yano* [16] beantwortet.

Schließlich seien noch die Anwendungsmöglichkeiten von Satz 1 bei Entwicklungen nach Eigenfunktionen einer *Sturm-Liouville*schen Randwertaufgabe (dazu vergleiche man [17], [18], [19]), bei Entwicklungen nach Kugelfunktionen [20] und bei Polynominterpolation mit Nullstellen von ultrasphärischen Polynomen als Knoten [21] genannt.

7. Ein Gegenbeispiel

Es ist natürlich wünschenswert, den Gültigkeitsbereich der in Satz 1 gegebenen Abschätzung möglichst weit auszudehnen. Die Voraussetzung (2,1) ist auf die wichtigsten Anwendungen zugeschnitten. Betrachtet man aber beliebige Matrizen $\mathfrak{A}$, so ist sie doch recht einschränkend, z. B. folgt ja aus (2,1) sofort, daß $a_{nk} \neq 0$ für alle k mit $0 \leq k \leq n$ gelten muß. (2,1) läßt sich in verschiedener Weise abschwächen, man kann etwa die rechte Seite $C a_j$ durch $C(a_j + a_{j-1})$ ersetzen, ohne daß Satz 1 seine Gültigkeit verliert. Es scheint aber nicht leicht zu sein, einen einfachen und viel weiter reichenden Ersatz für (2,1) zu finden. Man hat also — wenn man sich noch auf den Fall $N_{nk}^{(p)} = \text{const}$ beschränkt — das Problem:

„Unter welchen Voraussetzungen über $\mathfrak{A}$ und γ gilt

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k^{(n)}[f] - f \right\| \leq C \sum_{k=0}^{n} a_{nk} E_k[f] \tag{7,1}$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

mit einem von n und f unabhängigen C für alle $f \in B$?"

Wenn man die triviale Abschätzung $E_k[f] \leq \| f \|$ benutzt, dann kann man aus (7,1) sofort

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k^{(n)}[f] \right\| \leq (C+1) \| f \|$$

und damit

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k^{(n)} \right\| \leq C + 1 \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{7,2}$$

folgern. (7,2) ist also eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit von (7,1). Sie ist aber nicht hinreichend. Das soll nun durch ein Beispiel gezeigt werden. Die folgende Beziehung ist ein Spezialfall von (7,1):

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} S_k^{(2n-1)}[f] - f \right\| \leq C \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} E_k[f]$$

Setzt man hier ein $f \in U_{n+1}$ ein, dann erhält man

$$\frac{1}{n} \| S_n^{(2n-1)}[f] - f \| \leq C \frac{1}{n} E_n[f]$$

oder

$$\| S_n^{(2n-1)}[f] \| \leq C\, E_n[f] + \| f \| \leq (C+1) \| f \|$$

Das ist im Fall der *Legendre*-Reihen nicht richtig. Um das einzusehen, wähle man für ein genügend großes n

$$f(x) = \sqrt{n}\,[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)]$$

und benutze die bekannten Beziehungen [12]

$$\sup_{x \in [-1,1]} | P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x) | \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{n}}$$

$$\sup_{x \in [-1,1]} | P_n(x) | = 1$$

Nun ist die *Legendre*-Reihe einer stetigen Funktion f gleichmäßig C_1-limitierbar gegen f. Daraus folgt wegen

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} S_k^{(2n-1)} = 2\left(\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} S_k^{(2n-1)}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k^{(2n-1)}$$

daß (7,2) erfüllt ist. Damit ist gezeigt, daß (7,2) nicht hinreichend für (7,1) ist. Übrigens kommt man auch dann nicht zu weitertragenden Ergebnissen, wenn man (bei Gültigkeit von (7,2)) zuläßt, daß die Konstante C in (7,1) von f abhängt.

Literatur

[1] *S. B. Stečkin:* The approximation of periodic functions by Fejér sums. Trudy Mat. Inst. Steklov *62* (1961), S. 48–60; (russ.) übersetzt in Amer. Math. Soc. Translations, Series 2, volume 28, S. 269–282.

[2] *M. F. Timan:* Some linear summation processes. Dokl. Akad. Nauk. SSSR *145* (1962), S. 741–743; übersetzt in Soviet Math. III, *4*, S. 1102–1105.

[3] *G. Freud:* Über die $(C, 1)$-Summen der Entwicklungen nach orthogonalen Polynomen. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *14* (1963), S. 197–208.

[4] *C. de la Vallée Poussin:* Cours d'Analyse. Paris 1947.

[5] *G. G. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya:* Inequalities. Cambridge 1964.

[6] *A. F. Timan:* Theory of approximation of functions of a real variable. Oxford 1963.

[7] *Y. Suzuki:* Approximation of functions by Riesz Means of their Fourier Series. Tohoku Math. J. (2) *15* (1963).

[8] *I. P. Natanson:* Konstruktive Funktionentheorie. Berlin 1955.

[9] *A. Zygmund:* The approximation of functions by typical means of their Fourier series. Duke Math. J. *12* (1945), S. 695–704.

[10] *S. I. Rappoport:* Über ein Approximationsverfahren (russ.). Dokl. Akad. Nauk. *56* (1947), S. 11–12.

[11] *G. Sunouchi:* Approximation and saturation of functions. Tohoku Math. J. (2) *15* (1963), S. 162–166.

[12] *G. Szegö:* Orthogonal Polynomials. New York 1959.

[13] *E. Kogbetliantz:* Recherches sur la sommabilíté des séries ultraspheriques. Journal de Math. (9) vol. 3 (1924), S. 107–187.

[14] *J. L. Walsh:* A closed set of normal orthogonal functions. Amer. J. Math. *55* (1923), S. 5–24.

[15] *N. J. Fine:* On the Walsh functions. Transact. Amer. Math. Soc. *65* (1949), S. 372–414.

[16] *S. Yano:* On approximation by Walsh functions. Proc. Amer. Math. Soc. *2* (1951), S. 962–967.

[17] *A. Haar:* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Gesammelte Werke. Budapest 1959, S. 47–87.

[18] *D. Jackson:* On the degree of convergence of Sturm-Liouville series. Transact. Amer. Math. Soc. *15* (1914), S. 439–466.

[19] *B. Scarpellini:* Approximation von Funktionen durch Linearkombinationen von Eigenfunktionen Sturm-Liouvillescher Differentialgleichungen. Comm. Math. Helv. *36* (1962).

[20] *T. H. Gronwall:* On the degree of convergence of Laplace's series. Transact. Amer. Math. Soc. *15* (1914), S. 1–30.

[21] *I. P. Natanson:* Über den Satz von Losinski. Dokl. Akad. Nauk. *117* (1957), S. 32–35 (russ.).